第 31 卷 第 1 期 应 用 力 学 学 报 Vol.31 No.1
2014 年 2 月 CHINESE JOURNAL OF APPLIED MECHANICS Feb. 2014
文章编号：1000- 4939(2014) 01-0007-07

偏场作用下不可压缩软电弹性圆柱壳的轴对称波动

苏益品 陈伟球

(浙江大学工程力学系 310027 杭州)

摘要：基于 Dorfmann-Ogden 非线性电弹性框架及其线性增量理论，研究了在偏场作用下的不可压缩各向同性软电弹性圆柱壳中的轴对称波，获得了以贝塞尔函数表示的波动解和精确的频散方程。针对已有文献提出的非线性软电弹性材料模型，研究了偏场下电弹性圆柱壳的波动特性。结果表明：预加电场与预拉伸对软电弹性圆柱壳中波动的影响显著，二者可用于对波动特性的调控。另外，对比研究了不同结构形式、考虑和不考虑真空情况下电场对波动特性的影响，结果表明：这两个因素的变化会使弥散曲线形状发生较大的改变。

关键词：软电弹性；圆柱壳；偏场；线性增量理论；轴对称波
中图分类号：O343.5 **文献标识码**：A DOI：10.11776/cjam.31.01.C006

1 引 言

软电弹性材料(Soft electroactive materials)是一种新型的智能材料，在外电场的作用下其材料特性会发生显著的改变，能实现大变形且反应时间快，在制造柔性机器人、制动器、能量采集装置和其它新型功能器件方面有广泛的应用前景，近年来得到了学术界和工业界的广泛关注[1-3]。

众所周知，演奏者通过调控琴弦的张紧程度可以使琴发出不同的声音，这形象地说明了预变形可以改变材料的动力学特性。另一方面，声波技术已成为测量材料常数的重要手段。因此，研究偏场作用下软电弹性材料或结构中波的传播不仅具有重要的理论价值，也有明确的现实意义。Dorfmann 和 Ogden[4]基于他们先前提出的非线性理论框架[5-6]及线性增量理论[7]研究了软电弹性全空间中的平面波和半空间中的 Rayleigh 表面波，分析了偏场的影响。文献[8]考察了软电弹性实心圆柱体中波的传播，采用 Dorfmann-Ogden 电弹性理论导出了精确的轴对称波动解。

鉴于空心圆柱壳结构在实际应用中的重要性，本文将文献[8]的工作进行推广。同样基于 Dorfmann-Ogden 电弹性理论，研究预拉伸和预置电场对不可压缩软电弹性圆柱壳中轴对称波传播特性的影响，给出数值计算并进行讨论。

2 电弹性体的线性增量理论

本节简要介绍Dofmann和Ogden提出的基于非线性连续介质力学并考虑力电耦合的线性增量理论[7]。关于 Dofmann-Ogden 非线性电弹性理论框架[5-6]，

基金项目：国家自然科学基金(11272281；11090333) **收稿日期**：2013-03-14 **修回日期**：2013-08-03
第一作者简介：苏益品，男，1989 年生，浙江大学应用力学研究所，研究生；研究方向——软物质力学、电弹性体波动。
通讯作者：陈伟球，**E-mail**：chenwq@zju.edu.cn

可参考文献[8]。

取物体未变形时的初始构型为参考构型，记作 B_{r} (边界记作 ∂B_{r}，外法线方向记作 $\boldsymbol{N}$)，其上的点记作 $\boldsymbol{X}$。经过运动 $\boldsymbol{x}=\chi(\boldsymbol{X},t)$ 后，初始构型变为现时构形，记作 B_{t} (边界记作 ∂B_{t}，外法线方向记作 $\boldsymbol{n}$)。假设在运动 $\boldsymbol{x}=\chi(\boldsymbol{X},t)$ 上再叠加一无限小运动 $\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{X},t)$，这里圆点表示变量的微小增量，根据 Dorfmann-Ogden 理论，有

$$\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{T}}_0=\rho\boldsymbol{u}_{,tt} \tag{1}$$

$$\operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{E}}_{10}=\boldsymbol{0},\ \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{D}}_{10}=0 \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{u}$ 是增量位移；$\dot{\boldsymbol{E}}_{10}$、$\dot{\boldsymbol{D}}_{10}$ 分别是 Eulerian 描述下电场强度 $\boldsymbol{E}_{10}$、电位移 $\boldsymbol{D}_{10}$ 的增量，$\dot{\boldsymbol{T}}_0=\boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{T}},\dot{\boldsymbol{E}}_{10}=\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{E}}_1$，$\dot{\boldsymbol{D}}_{10}=\boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{D}}_1$；$\dot{\boldsymbol{T}}$、$\dot{\boldsymbol{E}}_1$、$\dot{\boldsymbol{D}}_1$ 分别是名义应力 $\boldsymbol{T}$、Lagrange 描述下电场强度 $\boldsymbol{E}_1$、电位移 $\boldsymbol{D}_1$ 的增量。div 和 curl 分别是现时构型中的散度和旋度算符。考虑各向同性软电弹性体，其线性化本构关系为

$$\dot{\boldsymbol{T}}_0=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\Gamma}_0\dot{\boldsymbol{D}}_{10}+p\boldsymbol{H}-\dot{p}\boldsymbol{I}\ ,\ \dot{\boldsymbol{E}}_{10}=\boldsymbol{\Gamma}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{K}_0\dot{\boldsymbol{D}}_{10} \tag{3}$$

式中：p 对应材料不可压缩条件的 Lagrange 乘子，$\boldsymbol{H}=\operatorname{grad}\boldsymbol{u}$ 为位移梯度，且

$$A_{0piqj}=F_{p\alpha}F_{q\beta}A_{\alpha i\beta j}=A_{0qjpi},\Gamma_{0piq}=F_{p\alpha}F_{\beta q}^{-1}\Gamma_{\alpha i\beta}=\Gamma_{0ipq},$$
$$K_{0ij}=F_{\alpha i}^{-1}F_{\beta j}^{-1}K_{\alpha\beta}=K_{0ji} \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\Gamma}$、$\boldsymbol{K}$ 为等效电弹性模量，其大小与偏场有关，具体形式可参见文献[4-8]。本文仅上式采用了求和约定。

由于材料不可压缩，有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{5}$$

另外，真空中麦克斯韦方程的增量形式为

$$\dot{\boldsymbol{D}}^*=\varepsilon_0\dot{\boldsymbol{E}}^*,\ \operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{E}}^*=\boldsymbol{0},\ \ \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{D}}^*=0 \tag{6}$$

其中 ε_0 为真空介电常数。

在电弹性体与真空的界面处，增量场需满足如下条件

$$(\dot{\boldsymbol{E}}_{10}-\dot{\boldsymbol{E}}^*-\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^*)\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0},\ (\dot{\boldsymbol{D}}_{10}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{D}^*-\dot{\boldsymbol{D}}^*)\cdot\boldsymbol{n}=0 \tag{7}$$

$$\dot{\boldsymbol{T}}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}=\dot{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{A}0}+\dot{\boldsymbol{\tau}}^*\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\tau}^*\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n} \tag{8}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{A}0}\,\mathrm{d}a=\dot{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{d}A$ (其中：$\boldsymbol{t}_{\mathrm{A}}$ 是施加在参考构型物体边界上的外力；$\dot{\boldsymbol{t}}_{\mathrm{A}}$ 表示 $\boldsymbol{t}_{\mathrm{A}}$ 的增量；$\mathrm{d}a$ 与 $\mathrm{d}A$ 分别是现时构型和参考构型物体表面的微元面积)。真空中的麦克斯韦应力及其增量形式为

$$\boldsymbol{\tau}^*=\varepsilon_0\left[\boldsymbol{E}^*\otimes\boldsymbol{E}^*-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}^*)\boldsymbol{I}\right] \tag{9a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^*=\varepsilon_0\left[\dot{\boldsymbol{E}}^*\otimes\boldsymbol{E}^*+\boldsymbol{E}^*\otimes\dot{\boldsymbol{E}}^*-(\boldsymbol{E}^*\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^*)\boldsymbol{I}\right] \tag{9b}$$

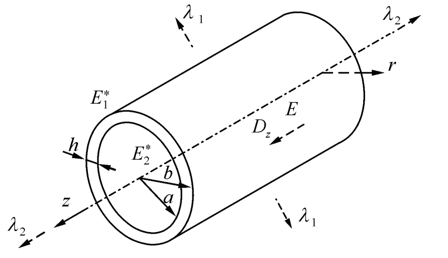

图1 圆柱壳及其偏场状态

Fig.1 Cylindrical shell subject to a uniform biasing field

3 轴对称问题的控制方程

3.1 均匀偏场及其影响

考虑如图1所示的无限长软电弹性圆柱壳，其内、外半径分别为 a、b，壁厚为 $h\equiv b-a$。在初始构型圆柱坐标系 (R,Θ,Z) 中，该圆柱壳承受的均匀预变形可用 $r=\lambda_1 R$、$\theta=\Theta$、$z=\lambda_2 Z$ 描述，其中 λ_1 和 λ_2 分别为径向和轴向的伸长率；圆柱壳同时承受电位移矢量只有轴向分量 D_z 的均匀电场作用。因此，在偏场状态，有

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}\lambda_1^2&0&0\\0&\lambda_1^2&0\\0&0&\lambda_2^2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{Bmatrix}0\\0\\D_z\end{Bmatrix} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 分别为左、右柯西-格林变形张量。由不可压缩条件可知 $\lambda_2=\lambda_1^{-2}$。

与文献[8]相同，圆柱壳中($\lambda_1 a\equiv r_{\mathrm{i}}\leqslant r\leqslant r_{\mathrm{o}}\equiv\lambda_1 b$)柯西应力张量和电场矢量的非零分量分别为

$$\tau_{rr}=\tau_{\theta\theta}=2\Omega_1\lambda_1^2+2\Omega_2(I_1\lambda_1^2-\lambda_1^4)-p,$$
$$\tau_{zz}=2\Omega_1\lambda_2^2+2\Omega_2(I_1\lambda_2^2-\lambda_2^4)-p+$$
$$2\Omega_5 D_z^2+4\Omega_6\lambda_2^2 D_z^2,$$
$$E_z=2(\Omega_4\lambda_2^{-2}+\Omega_5+\Omega_6\lambda_2^2)D_z \tag{11}$$

式中 $\Omega_m=\partial\Omega/\partial I_m\ \ (m=1,2,\cdots,6)$。其中：$\Omega$ 为参考构型下各向同性软电弹性体的能量密度函数；I_m 为不变量，详见文献[4-8]。由式(11)中第三式可知，若已知偏场状态的电场强度，则电位移分量 D_z 可按下式计算

$$D_z=\frac{E_z}{2(\Omega_4\lambda_2^{-2}+\Omega_5+\Omega_6\lambda_2^2)} \tag{12}$$

与圆柱壳中的上述均匀偏场相对应，圆柱壳外($r>r_{\mathrm{o}}$)和圆柱壳内($r<r_{\mathrm{i}}$)真空中电场和麦克斯韦应力的非零分量分别为

$$E^*_{\text{o}z}=E^*_{\text{i}z}=E_z=2(\Omega_4\lambda_2^{-2}+\Omega_5+\Omega_6\lambda_2^2)D_z,$$
$$D^*_{\text{o}z}=D^*_{\text{i}z}=2\varepsilon_0(\Omega_4\lambda_2^{-2}+\Omega_5+\Omega_6\lambda_2^2)D_z,$$
$$\tau^*_{\text{o}rr}=\tau^*_{\text{i}\theta\theta}=-\tau^*_{\text{o}zz}=\tau^*_{\text{i}rr}=\tau^*_{\text{i}\theta\theta}=-\tau^*_{\text{i}zz}=-2\varepsilon_0(\Omega_4\lambda_2^{-2}+\Omega_5+\Omega_6\lambda_2^2)^2D_z^2 \tag{13}$$

式中下标 o(i)代表圆柱壳外(内)电场。

文献[8]给出了对应上述均匀偏场的等效电弹性模量 A_{0ijkl}、K_{0ij}、Γ_{0ijk} 的具体表达式，这里不再列出；但需要指出的是，各向同性软电弹性材料在预置前述均匀偏场后呈现出了横观各向同性材料的特点。

3.2　增量方程及边界条件

考虑在前述均匀偏场之上再叠加一个无限小的轴对称运动，即

$$u_r=u_r(r,z,t),\ u_z=u_z(r,z,t),\ \dot{D}_{10r}=\dot{D}_{10r}(r,z,t)$$
$$\dot{D}_{10z}=\dot{D}_{10z}(r,z,t),\ \dot{p}=\dot{p}(r,z,t) \tag{14}$$

则位移梯度 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\partial u_r/\partial r & 0 & \partial u_r/\partial z\\ 0 & u_r/r & 0\\ \partial u_z/\partial r & 0 & \partial u_z/\partial z\end{bmatrix} \tag{15}$$

由式(3)可得应力及电场的增量形式

$$\dot{T}_{0rr}=(A_{01111}+p)\frac{\partial u_r}{\partial r}+A_{01122}\frac{u_r}{r}+A_{01133}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\Gamma_{0113}\dot{D}_{10z}-\dot{p},$$
$$\dot{T}_{0\theta\theta}=A_{01122}\frac{\partial u_r}{\partial r}+(A_{01111}+p)\frac{u_r}{r}+A_{01133}\frac{\partial u_z}{\partial z}+\Gamma_{0113}\dot{D}_{10z}-\dot{p},$$
$$\dot{T}_{0zz}=A_{01133}\frac{\partial u_r}{\partial r}+A_{01133}\frac{u_r}{r}+(A_{03333}+p)\frac{\partial u_z}{\partial z}+\Gamma_{0333}\dot{D}_{10z}-\dot{p},$$
$$\dot{T}_{0rz}=(A_{01331}+p)\frac{\partial u_r}{\partial z}+A_{01313}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\Gamma_{0131}\dot{D}_{10r},$$
$$\dot{T}_{0zr}=A_{03131}\frac{\partial u_r}{\partial z}+(A_{01331}+p)\frac{\partial u_z}{\partial r}+\Gamma_{0131}\dot{D}_{10r},$$
$$\dot{E}_{10r}=\Gamma_{0131}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+K_{011}\dot{D}_{10r},$$
$$\dot{E}_{10z}=\Gamma_{0113}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right)+\Gamma_{0333}\frac{\partial u_z}{\partial z}+K_{033}\dot{D}_{10z} \tag{16}$$

对轴对称运动，式(1)~(2)和式(5)可展开为

$$\frac{\partial\dot{T}_{0rr}}{\partial r}+\frac{\partial\dot{T}_{0zr}}{\partial z}+\frac{\dot{T}_{0rr}-\dot{T}_{0\theta\theta}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_r}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial\dot{T}_{0rz}}{\partial r}+\frac{\partial\dot{T}_{0zz}}{\partial z}+\frac{\dot{T}_{0rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2} \tag{17}$$

$$\frac{\partial\dot{E}_{10r}}{\partial z}-\frac{\partial\dot{E}_{10z}}{\partial r}=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial\dot{D}_{10r}}{\partial r}+\frac{\dot{D}_{10r}}{r}+\frac{\partial\dot{D}_{10z}}{\partial z}=0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{20}$$

对于真空中的电场，类似有

$$\frac{\partial\dot{E}^*_{mr}}{\partial z}-\frac{\partial\dot{E}^*_{mz}}{\partial r}=0,\ \frac{\partial\dot{D}^*_{mr}}{\partial r}+\frac{\dot{D}^*_{mr}}{r}+\frac{\partial\dot{D}^*_{mz}}{\partial z}=0,\ (m=\text{o},\text{i}) \tag{21}$$

式中 $\dot{D}^*_{mj}=\varepsilon_0\dot{E}^*_{mj}(m=\text{o},\text{i};\ j=r,z)$。

本文假设所施加的边界外力增量为零，即 $\dot{\boldsymbol{t}}_{\text{A}0}=\boldsymbol{0}\ (r=r_\text{o},r_\text{i})$。对于圆柱壳内、外边界，分别有 $\boldsymbol{n}_\text{i}=(-1,0,0)$ 、 $\boldsymbol{n}_\text{o}=(1,0,0)$ 。这样，由式(8)可得到力学边界条件为

$$\dot{T}_{0rr}=\dot{\tau}^*_{mrr}-\tau^*_{mrr}\frac{\partial u_r}{\partial r},\ \dot{T}_{0rz}=\dot{\tau}^*_{mzr}-\tau^*_{mzz}\frac{\partial u_r}{\partial z},$$
$$(r=r_m;\ m=\text{o},\text{i}) \tag{22}$$

式中

$$\dot{\tau}^*_{mrr}=\dot{\tau}^*_{m\theta\theta}=-\dot{\tau}^*_{mzz}=-\varepsilon_0E^*_{mz}\dot{E}^*_{mz},$$
$$\dot{\tau}^*_{mrz}=\dot{\tau}^*_{mzr}=\varepsilon_0E^*_{mz}\dot{E}^*_{mr},(m=\text{o},\text{i}) \tag{23}$$

而 E^*_{mz} 已由式(13)给出。

相应地，电学边界条件也可从式(7)简化为

$$\dot{E}_{10z}-\dot{E}^*_{mz}-E^*_{mz}\frac{\partial u_z}{\partial z}=0,\ \dot{D}_{10r}+D^*_{mz}\frac{\partial u_r}{\partial z}-\dot{D}^*_{mr}=0,$$
$$(r=r_m;\ m=\text{o},\text{i}) \tag{24}$$

4　轴对称波的传播

4.1　方程的化简

与文献[8]相似，本文引入如下电势函数 ϕ

$$\dot{E}_{10r}=-\frac{\partial\phi}{\partial r},\ \dot{E}_{10z}=-\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{25}$$

这样式(18)将自动满足。本构关系式(16)可写成

$$\dot{T}_{0rr}=(c_{11}+p)\frac{\partial u_r}{\partial r}+c_{12}\frac{u_r}{r}+c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z}+e_{31}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\dot{p},$$
$$\dot{T}_{0\theta\theta}=c_{12}\frac{\partial u_r}{\partial r}+(c_{11}+p)\frac{u_r}{r}+c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z}+e_{31}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\dot{p},$$
$$\dot{T}_{0zz}=c_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r}+c_{13}\frac{u_r}{r}+(c_{33}+p)\frac{\partial u_z}{\partial z}+e_{33}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\dot{p},$$
$$\dot{T}_{0rz}=(c_{551}+p)\frac{\partial u_r}{\partial z}+c_{552}\frac{\partial u_z}{\partial r}+e_{15}\frac{\partial\phi}{\partial r},$$
$$\dot{T}_{0zr}=c_{553}\frac{\partial u_r}{\partial z}+(c_{551}+p)\frac{\partial u_z}{\partial r}+e_{15}\frac{\partial\phi}{\partial r} \tag{26a}$$

$$\dot{D}_{10r}=e_{15}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)-\varepsilon_{11}\frac{\partial\phi}{\partial r},$$

$$\dot{D}_{10z}=e_{31}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right)+e_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z}-\varepsilon_{33}\frac{\partial\phi}{\partial z}\tag{26b}$$

式中

$$\varepsilon_{11}=1/K_{011},\ \varepsilon_{33}=1/K_{033},\ e_{15}=-\Gamma_{0131}\varepsilon_{11},$$
$$e_{31}=-\Gamma_{0113}\varepsilon_{33},\ e_{33}=-\Gamma_{0333}\varepsilon_{33},\ c_{11}=A_{01111}+\Gamma_{0113}e_{31},$$
$$c_{12}=A_{01122}+\Gamma_{0113}e_{31},\ c_{13}=A_{01133}+\Gamma_{0113}e_{33},$$
$$c_{33}=A_{03333}+\Gamma_{0333}e_{33},\ c_{551}=A_{01331}+\Gamma_{0113}e_{15},$$
$$c_{552}=A_{01313}+\Gamma_{0131}e_{15},\ c_{553}=A_{03131}+\Gamma_{0131}e_{15}\tag{27}$$

将式(26)代入式(17)和式(19)，并利用不可压缩条件式(20)，可得

$$\begin{cases}(c_{11}-c_{13}-c_{551})\left(\nabla_r^2u_r-\dfrac{u_r}{r^2}\right)+c_{553}\dfrac{\partial^2u_r}{\partial z^2}+\\(e_{15}+e_{31})\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}-\dfrac{\partial\dot{p}}{\partial r}=\rho\dfrac{\partial^2u_r}{\partial t^2}\\c_{552}\nabla_r^2u_z+(c_{33}-c_{13}-c_{551})\dfrac{\partial^2u_z}{\partial z^2}+e_{15}\nabla_r^2\phi+\\e_{33}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\dfrac{\partial\dot{p}}{\partial z}=\rho\dfrac{\partial^2u_z}{\partial t^2}\\e_{15}\nabla_r^2u_z+(e_{33}-e_{15}-e_{31})\dfrac{\partial^2u_z}{\partial z^2}-\varepsilon_{11}\nabla_r^2\phi-\varepsilon_{33}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0\end{cases}\tag{28}$$

式中 $\nabla_r^2=\partial^2/\partial r^2+(1/r)\partial/\partial r$ 。式(28)和式(20)构成了以位移、电势和 Lagrange 乘子增量表示的圆柱壳波动增量场的控制方程，与横观各向同性圆柱壳的线弹性运动方程[9]形式相似。

类似地，引入电势函数 ϕ_m^*，使

$$\dot{E}_{mr}^*=-\frac{\partial\phi_m^*}{\partial r},\ \dot{E}_{mz}^*=-\frac{\partial\phi_m^*}{\partial z},\ (m=\mathrm{o,i})\tag{29}$$

显然式(21)中的第一式已经满足，根据第二式可得出

$$\nabla_r^2\phi_m^*+\frac{\partial^2\phi_m^*}{\partial z^2}=0\ ,\ \ (m=\mathrm{o,i})\tag{30}$$

即真空中的电势满足 Laplace 方程。

4.2 轴对称波动解

考虑沿圆柱壳 z 轴传播的轴对称波，可设

$$u_r=A_1\mathrm{J}_1(\alpha r)\sin(kz-\omega t)+A_2\mathrm{Y}_1(\alpha r)\sin(kz-\omega t),$$
$$u_z=B_1\mathrm{J}_0(\alpha r)\cos(kz-\omega t)+B_2\mathrm{Y}_0(\alpha r)\cos(kz-\omega t),$$
$$\phi=C_1\mathrm{J}_0(\alpha r)\cos(kz-\omega t)+C_2\mathrm{Y}_0(\alpha r)\cos(kz-\omega t),$$
$$\dot{p}=D_1\mathrm{J}_0(\alpha r)\sin(kz-\omega t)+D_2\mathrm{Y}_0(\alpha r)\sin(kz-\omega t)\tag{31}$$

式中：$\mathrm{J}_j(\cdot)$、$\mathrm{Y}_j(\cdot)$ 分别表示 j 阶第一类、第二类贝塞尔函数；α、k 分别为径向、周向波数；ω 为圆频率；A_j、B_j、C_j、D_j $(j=1,2)$ 为待定常数。将上述波动解代入式(28)和式(20)，可得一组关于 8 个待定常数的齐次代数方程，由该方程的非零解条件可导出如下特征方程

$$\begin{vmatrix}g_{11}&0&g_{13}&g_{14}\\0&g_{22}&g_{23}&g_{24}\\0&g_{32}&g_{33}&0\\g_{41}&g_{42}&0&0\end{vmatrix}=0\tag{32}$$

式中

$$g_{11}=\rho\omega^2-(c_{11}-c_{13}-c_{551})\alpha^2-c_{553}k^2,$$
$$g_{13}=(e_{15}+e_{31})\alpha k,\quad g_{14}=g_{41}=\alpha,$$
$$g_{22}=\rho\omega^2-c_{552}\alpha^2-(c_{33}-c_{13}-c_{551})k^2,$$
$$g_{23}=-e_{15}\alpha^2-e_{33}k^2,\quad g_{24}=g_{42}=-k,$$
$$g_{32}=-e_{15}\alpha^2-(e_{33}-e_{15}-e_{31})k^2,\ g_{33}=\varepsilon_{11}\alpha^2+\varepsilon_{33}k^2$$

当给定 k、ω 后，即可从上式求得六个 α 值。如取 $\mathrm{Re}[\alpha_j]>0$ 或 $\mathrm{Re}[\alpha_j]=0$ 且 $\mathrm{Im}[\alpha_j]>0$ $(j=1,2,3)$，那么波动解可表示为

$$u_r=\sum_{j=1}^{3}[A_{1j}\mathrm{J}_1(\alpha_jr)+A_{2j}\mathrm{Y}_1(\alpha_jr)]\sin(kz-\omega t),$$
$$u_z=\sum_{j=1}^{3}[\beta_{1j}A_{1j}\mathrm{J}_0(\alpha_jr)+\beta_{1j}A_{2j}\mathrm{Y}_0(\alpha_jr)]\cos(kz-\omega t),$$
$$\phi=\sum_{j=1}^{3}[\beta_{2j}A_{1j}\mathrm{J}_0(\alpha_jr)+\beta_{2j}A_{2j}\mathrm{Y}_0(\alpha_jr)]\cos(kz-\omega t),$$
$$\dot{p}=\sum_{j=1}^{3}[\beta_{3j}A_{1j}\mathrm{J}_0(\alpha_jr)+\beta_{3j}A_{2j}\mathrm{Y}_0(\alpha_jr)]\sin(kz-\omega t)\tag{33}$$

式中 β_{nj} $(n=1,2,3)$可由上述齐次代数方程组确定为

$$\beta_{1j}=\frac{\alpha_j}{k},\ \beta_{2j}=\frac{e_{15}\alpha_j^2+(e_{33}-e_{15}-e_{31})k^2}{\varepsilon_{11}\alpha_j^2+\varepsilon_{33}k^2}\beta_{1j},$$
$$\beta_{3j}=\frac{1}{k}\left\{\left[\rho\omega^2-c_{552}\alpha_j^2-(c_{33}-c_{13}-c_{551})k^2\right]\beta_{1j}-(e_{15}\alpha_j^2+e_{33}k^2)\beta_{2j}\right\},\ (j=1,2,3)\tag{34}$$

需要说明的是，本文没有如文献[10]一样对 α_j 的取值(实数，虚数或复数)进行讨论，因为目前的数值软件如 Mathematica、Matlab 都可以直接进行复杂的复数运算。

将式(33)所示的波动解代入式(26)和式(25)即可得到应力、电位移、电场强度等具体表达式，这里限于篇幅不再给出。

类似地，可得到圆柱壳内、外真空电场的电势，为

$$\phi_\mathrm{o}^*=C_\mathrm{o}^*\mathrm{K}_0(kr)\cos(kz-\omega t)\ ,$$
$$\phi_\mathrm{i}^*=C_\mathrm{i}^*\mathrm{I}_0(kr)\cos(kz-\omega t)\tag{35}$$

式中：C_m^* $(m=\mathrm{o,i})$ 为待定常数；$\mathrm{I}_0(\cdot)$、$\mathrm{K}_0(\cdot)$ 分别

为 0 阶第一类、第二类修正贝塞尔函数。由电势可根据式(29)得到内、外电场的电场强度矢量。

4.3　频散方程

将所求得的各物理量表达式代入边界条件式(22)和式(24)中，可得关于 A_{1j}、A_{2j} $(j=1,2,3)$ 和 C_m^* $(m=\mathrm{o,i})$ 的 8 个齐次代数方程，由非零解条件可得到如下频散方程

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & d_{17} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & d_{27} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & d_{37} & 0 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & 0 \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & 0 & d_{58} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} & 0 & d_{68} \\ d_{71} & d_{72} & d_{73} & d_{74} & d_{75} & d_{76} & 0 & d_{78} \\ d_{81} & d_{82} & d_{83} & d_{84} & d_{85} & d_{86} & 0 & d_{88} \end{vmatrix} = 0 \tag{36}$$

式中

$$\begin{aligned}
d_{1j} &= (c_{11}+\tau_{\mathrm{o}rr}^*+p)\mathrm{Z}_1'(\alpha_j r_\mathrm{o}) + c_{12}\mathrm{Z}_1(\alpha_j r_\mathrm{o})/r_\mathrm{o} - \\
&\quad (c_{13}k\beta_{1j}+e_{31}k\beta_{2j}+\beta_{3j})\mathrm{Z}_0(\alpha_j r_\mathrm{o}), \\
d_{2j} &= \left[(c_{551}+\tau_{\mathrm{o}zz}^*+p)k-(c_{552}\beta_{1j}+e_{15}\beta_{2j})\alpha_j\right]\mathrm{Z}_1(\alpha_j r_\mathrm{o}), \\
d_{3j} &= k(\beta_{2j}+\beta_{1j}E_{\mathrm{o}z}^*)\mathrm{Z}_0(\alpha_j r_\mathrm{o}), \\
d_{4j} &= \left[e_{15}(k-\alpha_j\beta_{1j})+\varepsilon_{11}\alpha_j\beta_{2j}+kD_{\mathrm{o}z}^*\right]\mathrm{Z}_1(\alpha_j r_\mathrm{o}), \\
d_{5j} &= (c_{11}+\tau_{\mathrm{i}rr}^*+p)\mathrm{Z}_1'(\alpha_j r_\mathrm{i}) + c_{12}\mathrm{Z}_1(\alpha_j r_\mathrm{i})/r_\mathrm{i} - \\
&\quad (c_{13}k\beta_{1j}+e_{31}k\beta_{2j}+\beta_{3j})\mathrm{Z}_0(\alpha_j r_\mathrm{i}), \\
d_{6j} &= \left[(c_{551}+\tau_{\mathrm{i}zz}^*+p)k-(c_{552}\beta_{1j}+e_{15}\beta_{2j})\alpha_j\right]\mathrm{Z}_1(\alpha_j r_\mathrm{i}), \\
d_{7j} &= k(\beta_{2j}+\beta_{1j}E_{\mathrm{i}z}^*)\mathrm{Z}_0(\alpha_j r_\mathrm{i}), \\
d_{8j} &= \left[e_{15}(k+\alpha_j\beta_{1j})+\varepsilon_{11}\alpha_j\beta_{2j}+kD_{\mathrm{i}z}^*\right]\mathrm{Z}_1(\alpha_j r_\mathrm{i}), \\
d_{17} &= \varepsilon_0 E_{\mathrm{o}z}^* k\mathrm{K}_0(kr_\mathrm{o}),\ d_{27} = -\varepsilon_0 E_{\mathrm{o}z}^* k\mathrm{K}_1(kr_\mathrm{o}), \\
d_{37} &= -k\mathrm{K}_0(kr_\mathrm{o}),\ d_{47} = -\varepsilon_0 k\mathrm{K}_1(kr_\mathrm{o}),\ d_{58} = \varepsilon_0 E_{\mathrm{i}z}^* k\mathrm{I}_0(kr_\mathrm{i}), \\
d_{68} &= \varepsilon_0 E_{\mathrm{i}z}^* k\mathrm{I}_1(kr_\mathrm{i}),\ d_{78} = -k\mathrm{I}_0(kr_\mathrm{i}),\ d_{88} = \varepsilon_0 k\mathrm{I}_1(kr_\mathrm{i})
\end{aligned} \tag{37}$$

其中：对于 $j=1,2,3$，$\mathrm{Z}(\cdot)$ 取 $\mathrm{J}(\cdot)$；对于 $j=4,5,6$，$\mathrm{Z}(\cdot)$ 取 $\mathrm{Y}(\cdot)$；同时，为方便表达起见，引入了 $\alpha_{j+3}=\alpha_j$ 和 $\beta_{n(j+3)}=\beta_{nj}(j,n=1,2,3)$。

如果圆柱是实心的，则式(33)中的 A_{2j} $(j=1,2,3)$ 为零，同时无内真空电场，此时频散方程(36)退化为

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{17} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{27} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{37} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{47} \end{vmatrix} = 0 \tag{38}$$

5　数值结果

在以下算例中，采用 Dorfmann 和 Ogden[4]提出的软电弹性材料模型，其能量密度函数如下

$$\varOmega = \frac{1}{2}\mu(I_1-3)+\frac{1}{\varepsilon_0}(\gamma_1 I_4+\gamma_2 I_5) \tag{39}$$

式中：μ 为剪切模量；γ_1、γ_2 为量纲为一的力电耦合系数。若不考虑力电耦合效应(即 $\gamma_1=\gamma_2=0$)，上述材料模型就退化为 neo-Hookean 非线性弹性材料。容易求出

$$\begin{aligned}
&\tau_{rr}=\tau_{\theta\theta}=\mu\lambda_1^2-p,\ \tau_{zz}=\mu\lambda_2^2-p+2\varepsilon_0^{-1}\gamma_1 D_z^2, \\
&E_z = 2\varepsilon_0^{-1}(\gamma_1\lambda_2^{-2}+\gamma_2)D_z, \\
&E_{\mathrm{o}z}^* = E_{\mathrm{i}z}^* = 2\varepsilon_0^{-1}(\gamma_1\lambda_2^{-2}+\gamma_2)D_z, \\
&D_{\mathrm{o}z}^* = D_{\mathrm{i}z}^* = 2\varepsilon_0^{-1}(\gamma_1\lambda_2^{-2}+\gamma_2)D_z, \\
&\tau_{\mathrm{o}rr}^* = \tau_{\mathrm{i}\theta\theta}^* = -\tau_{\mathrm{o}zz}^* = \tau_{\mathrm{i}rr}^* = \tau_{\mathrm{i}\theta\theta}^* = -\tau_{\mathrm{i}zz}^* \\
&\quad = 2\varepsilon_0^{-1}(\gamma_1\lambda_2^{-2}+\gamma_2)^2 D_z^2
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
&c_{11}=\mu\lambda_1^2,\ c_{12}=c_{13}=0,\ c_{553}=\mu\lambda_1^{-4}+2\varepsilon_0^{-1}\gamma_2 D_z^2+c_{551}, \\
&c_{33}=\mu\lambda_1^{-4}+2\varepsilon_0^{-1}\gamma_2 D_z^2-\frac{8\varepsilon_0^{-1}\gamma_2^2 D_z^2}{(\gamma_1\lambda_1^4+\gamma_2)}, \\
&c_{551}=-\frac{2\varepsilon_0^{-1}\gamma_2^2 D_z^2}{(\gamma_1\lambda_1^{-2}+\gamma_2)},\ c_{552}=\mu\lambda_1^2+c_{551}, \\
&\varepsilon_{11}=\frac{\varepsilon_0}{2(\gamma_1\lambda_1^{-2}+\gamma_2)},\ \varepsilon_{33}=\frac{\varepsilon_0}{2(\gamma_1\lambda_1^4+\gamma_2)}, \\
&e_{15}=-\frac{\gamma_2 D_z}{(\gamma_1\lambda_1^{-2}+\gamma_2)},\ e_{31}=0,\ e_{33}=-\frac{2\gamma_2 D_z}{(\gamma_1\lambda_1^4+\gamma_2)}
\end{aligned} \tag{41}$$

本文假设在偏场状态施加在圆柱壳内、外边界上的机械力为零，则静水压力 p 可由 $\tau_{rr}=\tau_{\mathrm{o}rr}^*=\tau_{\mathrm{i}rr}^*$ 确定。计算时，采用如下量纲为一的量

$$\varSigma=\omega b\sqrt{\frac{\rho}{\mu}},\ \kappa=kb\ ,\ \delta=D_z/\sqrt{\mu\varepsilon_0} \tag{42}$$

为了验证本文推导的正确性，首先考察实心软电弹性圆柱中的波的传播，相应的频散方程见式(38)，其形式除用第一类 Bessel 函数代替第一类修正的 Bessel 函数之外，与文献[8]完全一致。本文数值结果将给出频散曲线图，频散曲线上确定的是波数和频率之间的关系，进而又可确定频率和波速(相速度或群速度)之间的关系。图 2 和图 3 给出了第 1 枝、第 2 枝的频散曲线(量纲为一的频率 $\varSigma$ - 量纲为一的波数 κ 关系曲线)，其中图 2 对应力电耦合系数 $\gamma_1=1$ 和 $\gamma_2=2$，改变预拉伸 λ_1、电位移 δ；图 3 对应预拉伸 $\lambda_1=1.5$ 和电位移 $\delta=0.3$，改变力电耦合系数 γ_1、γ_2。可以看到，图 2 和图 3 所示的第一枝频散曲线与文献[8]的完全相同，不仅验证了本

文推导和计算的正确性，也充分说明了目前计算软件强大的复数运算能力。

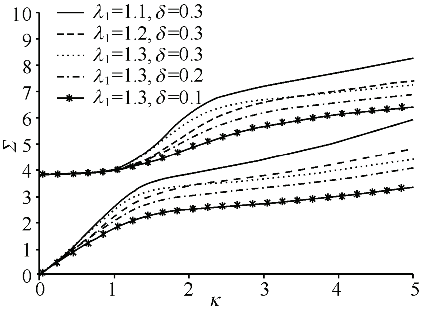

图 2 实心圆柱体中轴对称波的前 2 枝频散曲线($\gamma_1=1,\ \gamma_2=2$)

Fig.2 First two branches of dispersion spectra for axisymmetric wave in a soft electroactive cylinder($\gamma_1=1,\ \gamma_2=2$)

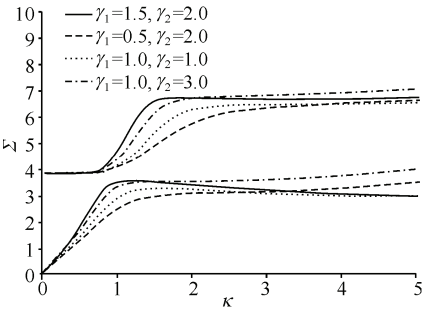

图 3 实心圆柱体中轴对称波的前 2 枝频散曲线(λ_1=1.5, δ=0.3)

Fig.3 First two branches of dispersion spectra for axisymmetric wave in a soft electroactive cylinder(λ_1=1.5, δ=0.3)

图 4 和图 5 给出了内、外半径比为 1:3 时的圆柱壳第 1 枝、第 2 枝频散曲线，其中图 4 对应于力电耦合系数$\gamma_1=1$和$\gamma_2=2$，改变预拉伸λ_1、电位移δ；图 5 对应于预拉伸$\lambda_1=1.5$和电位移$\delta=0.3$，改变力电耦合系数γ_1、γ_2。图 4 表明，预变形和预置电场都对软电弹性圆柱壳的波动特性产生重要影响，这与传统硬材料的情形[11]有所不同，说明偏场可以作为调控软电弹性结构或器件的动力学特性的有效手段。图 5 的结果则说明了材料参数对波动特性的影响：通过选择不同的力电耦合系数，可以达到优化结构动力学特性的目的。

对比图 4、图 5 与图 2、图 3 可发现，由于拓扑结构的不同，轴对称波的传播特性也发生了明显的变化，这为结构波动特性的调节提供了又一方法。

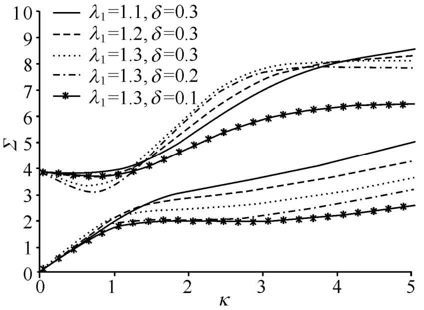

图 4 圆柱壳前 2 枝频散曲线($\gamma_1=1,\ \gamma_2=2$)

Fig.4 First two branches of dispersion spectra for axisymmetric wave in a soft electroactive cylindrical shell($\gamma_1=1,\ \gamma_2=2$)

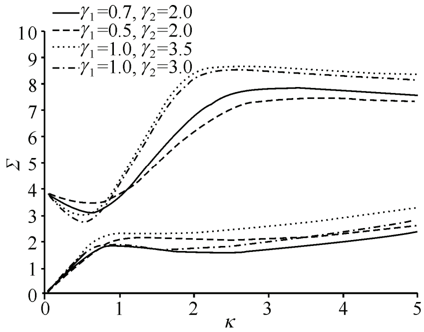

图 5 圆柱壳前 2 枝频散曲线(λ_1=1.5, δ=0.3)

Fig.5 First two branches of dispersion spectra for axisymmetric wave in a soft electroactive cylindrical shell(λ_1=1.5, δ=0.3)

与 Dorfmann-Ogden 理论不同，目前有一些力电耦合理论没有给出物体之外真空中电场的列式，忽略了其影响。为了考察真空电场对软电弹性圆柱壳中波动特性的影响，需导出不考虑真空电场作用的频散方程。此时，电学边界条件式(24)变为

$$\dot{D}_{10r}=0\ ,\quad (r=r_m;\ m=\mathrm{o,i}) \tag{43}$$

频散方程为

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \\ d_{81} & d_{82} & d_{83} & d_{84} & d_{85} & d_{86} \end{vmatrix}=0 \tag{44}$$

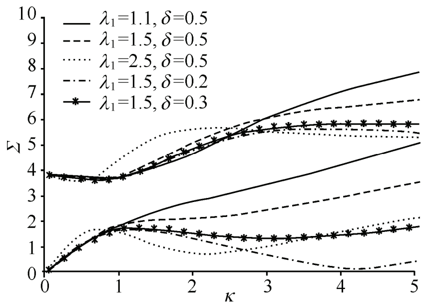

图 6 不考虑真空中电场影响的圆柱壳前 2 枝频散曲线($\gamma_1=1,\ \gamma_2=2$)

Fig.6 First two branches of dispersion spectra for axisymmetric wave in a soft electroactive cylindrical shell without considering electric field of vacuum($\gamma_1=1,\ \gamma_2=2$)

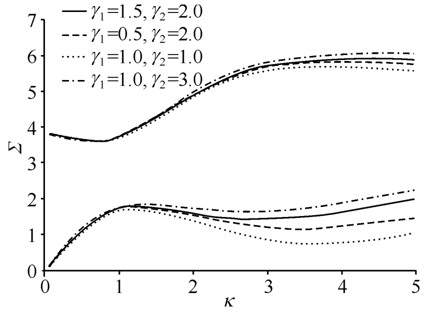

图 7 不考虑真空中电场影响的圆柱壳前 2 枝频散曲线(λ_1=1.5, δ=0.3)

Fig.7 First two branches of dispersion spectra for axisymmetric wave in a soft electroactive cylindrical shell without considering electric field of vacuum (λ_1=1.5, δ=0.3)

图 6 和图 7 为不考虑真空中电场影响的圆柱壳频散曲线。通过对比可以看出，是否考虑外电场对曲线的影响是明显的，图 6 中频率随波数的变化方式比图 4 更复杂、更丰富，同时图 7 中随波数的增加，不同力电耦合系数的各曲线区分也更加明显。

6 结束语

本文将文献[8]的工作进行了推广，考察了偏场作用下软电弹性圆柱壳中轴对称波的传播特性。在实心圆柱情形，本文获得的解与文献[8]完全一致，只不过本文采用了第一类 Bessel 函数来表示波动解，而文献[8]采用的是第一类修正的 Bessel 函数。由于目前计算软件的强大复数运算能力，两者的计算结果完全吻合。在圆柱壳情形，波动解中除了第一类 Bessel 函数，还须包括第二类 Bessel 函数，以满足圆柱壳内边界处的边界条件。

计算结果表明，偏场、材料模型中的力电耦合系数、结构形式(实心圆柱或圆柱壳)都对软电弹性圆柱体中波的传播特性有重要影响，这为多方面综合优化波动器件提供了理论依据。最后，对考虑和不考虑真空电场作用的情形进行了对比，结果显示，真空中电场对软电弹性结构或器件的影响不能忽略。

参 考 文 献 (References)

[1] Bar-Cohen Y. Electro-active polymers：current capabilities and challenges[C]//Proceedings of the 9th SPIE Smart Structures and Materials Symposium. San Diego，CA：SPIE，2002：1-7.

[2] Pelrine R，Kornbluh R，Pei Q B，et al. High-speed electrically actuated elastomers with strain greater than 100%[J]. Science，2002，287：836-839.

[3] Suo Zhigang. Theory of dielectric elastomers[J]. Acta Mechanica Solida Sinica，2010，23(6)：549-578.

[4] Dorfmann A，Ogden R W. Electroelastic waves in a finitely deformed electroactive material[J]. IMA Journal of Applied Mathematics，2010，75：603-636.

[5] Dorfmann A，Ogden R W. Nonlinear electroelasticity[J]. Acta Mechanica，2005，174：167-183.

[6] Dorfmann A，Ogden R W. Nonlinear electroelastic deformations[J]. Journal of Elasticity，2006，82：99-127.

[7] Dorfmann A，Ogden R W. Nonlinear electroelastostatics：incremental equations and stability[J]. International Journal of Engineering Science，2010，48(1)：1-14.

[8] Chen Weiqiu，Dai Huihui. Waves in pre-stretched incompressible soft electroactive cylinders：exact solution[J]. Acta Mechanica Solida Sinica，2012，25(5)：530-541.

[9] Ding Haojiang，Chen Weiqiu，Zhang Liangchi. Elasticity of transversely isotropic materials[M]. Dordrecht：Springer，2006.

[10] Mirsky I. Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders，part I：theory[J]. Journal of the Acoustical Society of America，1965，37：1016-1026.

[11] Zhou Yunying，Lv Chaofeng，Chen Weiqiu. Bulk wave propagation in layered piezomagnetic/piezoelectric plates with initial stresses or interface imperfections[J]. Composite Structures，2012，94(9)：2736-2745.